Die experimentelle Ermittlung der elastischen Konstanten höherer Ordnung

Von ALFRED SEEGER und OTTO BUCK

Aus dem Max-Planck-Institut für Metallforschung, Stuttgart,
und dem Institut für theoretische und angewandte Physik der Technischen Hochschule Stuttgart

(Z. Naturforschg. 15 a, 1056—1067 [1960]; eingegangen am 26. Juli 1960)

The application of the non-linear theory of elasticity to solid state problems has recently become of increasing importance. For numerical work the knowledge of the third-order elastic constants is required. The present paper compiles the various experimental methods for the experimental determination of these constants and derives, where required, the formulae for the evaluation of the experiments. We give a critical compilation of the available data on third-order elastic constants. A complete set is given for germanium single crystals (6 constants) and for polycrystalline copper and iron (3 constants).

Das HOOKEsche Gesetz, das heißt der lineare Zusammenhang zwischen der Spannung und der Verzerrung in einem elastischen festen Körper, stellt bekanntlich eine für viele Zwecke sehr gute, aber eben doch nicht immer ausreichende Näherung dar. In der modernen Festkörperphysik hat sich in den letzten Jahren eine ganze Reihe von Fragestellungen ergeben, bei denen es sich als notwendig und zweckmäßig erwies, über die lineare Spannungs- und Dehnungsbeziehung hinauszugehen und einen quadratischen Zusammenhang zwischen den Komponenten des Spannungstensors und jenen des Verzerrungstensors zu betrachten. Wir belegen dies durch Beispiele: Die Volumvergrößerung eines innere Spannungen, insbesondere Versetzungen, enthaltenden elastischen Körpers [1–3], die genauere Beschreibung der Verzerrungen und Spannungen in der Umgebung von Versetzungslinien [4–6], der elektrische Widerstand von Schrauben- [7, 8] und Stufenversetzungen [9], die Kleinwinkelstreuung von RÖNTGEN-Strahlen oder langsamen Neutronen [10], die Dämpfung hochfrequenter Schallwellen durch die sog. Phononenviskosität [11–13], die Bremsung sich rasch bewegender Versetzungen durch den gleichen Effekt [13] und schließlich die Streuung von Phononen an Gitterfehlern, z. B. Versetzungen, und die Phononen – Phononen-Wechselwirkung, wie sie im Wärmewiderstand von Isolatoren und Legierungen zutage tritt [14].

Zur quantitativen Behandlung dieser Effekte muß man die in die Spannungs – Dehnungs-Beziehungen eingehenden, zu den gewöhnlichen elastischen Konstanten hinzutretenden Materialkonstanten kennen. Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit den zu ihrer experimentellen Bestimmung verfügbaren Methoden und mit der Auswertung und Zusammenstellung der bis jetzt vorliegenden Meßwerte *. Wir beschränken uns dabei auf die im Ausdruck für die elastische Energiedichte bei den dritten Potenzen der Verzerrungen stehenden Konstanten, die üblicherweise als elastische Konstanten dritter Ordnung bezeichnet werden. (In dieser Nomenklatur sind die gewöhnlichen elastischen Konstanten solche „zweiter Ordnung".) Wir lehnen uns weitgehend an die von MURNAGHAN [15] gegebene Formulierung der nichtlinearen Elastizitätstheorie an und benützen dabei dieselbe Bezeichnung wie SEEGER und MANN [4]. § 1 stellt nochmals die wesentlichsten Definitionen zusammen.

1 C. ZENER, Trans. Amer. Inst. Min. Metallurg. Engrs. **147**, 361 [1942].
2 A. SEEGER u. P. HAASEN, Phil. Mag. **3**, 470 [1958].
3 A. SEEGER, Suppl. Nuovo Cim. (X) **7**, 632 [1958].
4 A. SEEGER u. E. MANN, Z. Naturforschg. **14 a**, 154 [1959].
5 E. KRÖNER u. A. SEEGER, Arch. Rat. Mech. Analysis **3**, 97 [1959].
6 H. PFLEIDERER, A. SEEGER u. E. KRÖNER, Z. Naturforschg. **15 a**, 758 [1960].
7 H. STEHLE u. A. SEEGER, Z. Phys. **146**, 217 [1956].
8 A. SEEGER u. H. STEHLE, Z. Phys. **146**, 242 [1956].
9 A. SEEGER u. H. BROSS, Z. Naturforschg. **15 a**, 663 [1960].
10 A. SEEGER, J. Appl. Phys. **30**, 629 [1959].
11 A. AKHIEZER, J. Phys. USSR **1**, 277 [1939].
12 E. BÖMMEL u. K. DRANSFELD, Phys. Rev. **117**, 1245 [1960].
13 W. P. MASON, J. Acoust. Soc. Amer. **32**, 458 [1960].
14 Unveröffentlichte Arbeiten von H. BROSS, A. SEEGER, P. GRUNER u. P. KIRSCHENMANN.
* Die Arbeit beschränkt sich auf isotrope Medien und kubische Kristalle. Die Ausdehnung auf Kristalle niedriger Symmetrie ist möglich, erscheint aber wegen des geringer vorliegenden experimentellen Materials noch nicht notwendig.
15 F. D. MURNAGHAN, Finite Deformation of an Elastic Solid, John Wiley & Sons, New York 1951.

Die wichtigsten Gesichtspunkte bei der experimentellen Bestimmung der elastischen Konstanten dritter Ordnung sind schon an anderer Stelle [4] besprochen worden. Es wurde dargelegt, daß durch Messungen unter hydrostatischem Druck p jene Kombinationen von Konstanten dritter Ordnung, die sich als die p-Abhängigkeiten der normalen elastischen Konstanten darstellen lassen, verhältnismäßig einfach zu messen sind. Dies gilt auch für spröde oder leicht verformbare Materialen, die unter Schubspannungen entsprechender Größe brechen oder sich plastisch verformen würden. Die zur Auswertung dieser Messungen benötigten Formeln stellen wir in § 2 zusammen. Hier ist auch der Koeffizient der thermischen Ausdehnung bzw. die Grüneisen-Konstante besprochen, aus denen sich eine Kombination der eben erwähnten Druckabhängigkeiten gewinnen läßt. Ist die Grüneisen-Konstante sowohl bei hohen als auch bei tiefen Temperaturen bekannt, so kann man für ein isotropes Medium in gewisser Näherung daraus die Druckabhängigkeiten von Kompressions- und Schubmodul je für sich ermitteln. Für die Bestimmung der beiden zuletzt genannten Größen gibt es also eine ganze Reihe von Verfahren.

Wesentlich schwieriger ist es, die übrigen elastischen Konstanten 3. Ordnung zu ermitteln. In § 3 werden zunächst die statischen Verfahren besprochen. Für Stoffe, die in Form von Drähten mit hoher Elastizitätsgrenze vorliegen, z. B. für hartgezogene vielkristalline Metalle, kommt vor allem der Poynting-Effekt [16, 17] in Frage. Er beruht darauf, daß bei der Torsion eines Stabes zwar nicht nach der linearen, wohl aber nach der quadratischen Theorie Änderungen der Länge und des Radius (somit also auch des Volumens) auftreten. In § 3 a sind die betreffenden Formeln für ein isotropes Medium angegeben; würde man Drähte mit starker Textur verwenden, so könnte man in entsprechender Weise auch Informationen über die anisotropen Konstanten erhalten.

An *whiskers* (Einkristallfäden), welche nahezu die theoretische Schubfestigkeit idealer Kristalle besitzen, können in günstigen Fällen Abweichungen vom Hookeschen Gesetz beobachtet und zur Bestimmung der anisotropen elastischen Konstanten dritter Ordnung verwendet werden. Da bis jetzt derartige Messungen nur im Zugversuch [18] (an Fe-whiskers) vorliegen, leiten wir in § 3 b die für die Auswertung benötigten Gleichungen nur für den einachsigen Zug kubischer Kristalle, und zwar in den drei Symmetrierichtungen $\langle 100\rangle$, $\langle 110\rangle$ und $\langle 111\rangle$, ab. Ähnliche Gleichungen ließen sich bei Bedarf auch für Torsion oder Biegung gewinnen.

In ein- oder vielkristallinen Stoffen, die eine genügend hohe Schubfestigkeit aufweisen, können die benötigten Kombinationen von Konstanten 3. Ordnung durch Schallgeschwindigkeitsmessungen unter einachsigem Druck (oder Zug) gewonnen werden. In § 4 stellen wir die von Hughes und Kelly [19] für isotrope Stoffe abgeleiteten Gleichungen für die Schallgeschwindigkeiten zusammen. Neuerdings haben Bateman, Mason und McSkimmin [20] entsprechende Messungen an Germanium-Einkristallen durchgeführt. Die zur Auswertung dieser Versuche erforderlichen theoretischen Ergebnisse leiten wir in einem Anhang ab. Auf diese Weise ist es zum ersten Male möglich, alle sechs elastischen Konstanten 3. Ordnung eines kubischen Kristalls experimentell zu bestimmen.

In § 5 wird ein Vorschlag zur Bestimmung der Konstanten 3. Ordnung aus Beugungsversuchen an durchsichtigen Kristallen gemacht.

Die wichtigsten Meßergebnisse über elastische Konstanten 3. Ordnung werden in § 6 zusammengestellt und miteinander verglichen. Neben dem schon erwähnten Germanium ist es möglich, für zwei weitere Stoffe, nämlich vielkristallines Kupfer und vielkristallines Eisen, den vollständigen Satz der elastischen Konstanten dritter Ordnung anzugeben.

§ 1. Definition der höheren elastischen Konstanten

Die Deformationsenergie Φ eines elastischen isotropen Mediums läßt sich nach Murnaghan [15] auch über den Bereich der linearen Elastizitätstheorie hinaus als Funktion der Invarianten J_j des Verzerrungstensors $\boldsymbol{\gamma}=\frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{J}}\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I})$ darstellen, wobei hier alles auf Teilchenkoordinaten im unverformten Ausgangszustand bezogen wird [4]:

$$\Phi = \frac{2\,\mu+\lambda}{2}\,J_1{}^2 - 2\,\mu\,J_2 + \frac{l+2\,m}{3}\,J_1{}^3 - 2\,m\,J_1\,J_2 + n\,J_3\,. \tag{1}$$

[16] J. H. Poynting, Proc. Roy. Soc., Lond. A **82**, 546 [1909].
[17] J. H. Poynting, Proc. Roy. Soc., Lond. A **86**, 534 [1912].
[18] S. S. Brenner, J. Appl. Phys. **27**, 1484 [1956].
[19] D. S. Hughes u. I. L. Kelly, Phys. Rev. **92**, 1145 [1953].
[20] W. P. Mason, H. J. McSkimmin u. T. B. Bateman, wird demnächst veröffentlicht.

Dabei bedeutet

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{pmatrix} \tag{2}$$

die JACOBIsche Matrix, $\tilde{\boldsymbol{J}}$ die dazu transponierte Matrix, $\boldsymbol{I}$ die 3×3-Einheitsmatrix,

$$J_1 = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}, \tag{3}$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_{33} & \gamma_{31} \\ \gamma_{13} & \gamma_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix},$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix}$$

die drei Invarianten des Verzerrungstensors $\boldsymbol{\gamma}$, und μ und λ die LAMÉschen Konstanten.

Für ein anisotropes Medium ist die Deformationsenergie nicht mehr ausschließlich eine Funktion der Invarianten. Sie wird für kubische Kristallsysteme durch den Ausdruck **

$$\begin{aligned} \Phi = {} & \tfrac{1}{2} c_{11} (\gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2 + \gamma_{33}^2) + c_{44} (\gamma_{12}^2 + \gamma_{21}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{32}^2 + \gamma_{31}^2 + \gamma_{13}^2) + c_{12} (\gamma_{11} \gamma_{22} + \gamma_{22} \gamma_{33} + \gamma_{33} \gamma_{11}) \\ & + c_{111} (\gamma_{11}^3 + \gamma_{22}^3 + \gamma_{33}^3) + c_{112} [\gamma_{11}^2 (\gamma_{22} + \gamma_{33}) + \gamma_{22}^2 (\gamma_{33} + \gamma_{11}) + \gamma_{33}^2 (\gamma_{11} + \gamma_{22})] \\ & + \tfrac{1}{2} c_{144} [\gamma_{11} (\gamma_{23}^2 + \gamma_{32}^2) + \gamma_{22} (\gamma_{31}^2 + \gamma_{13}^2) + \gamma_{33} (\gamma_{12}^2 + \gamma_{21}^2)] + \tfrac{1}{2} c_{166} [(\gamma_{12}^2 + \gamma_{21}^2)(\gamma_{11} + \gamma_{22}) \\ & + (\gamma_{23}^2 + \gamma_{32}^2)(\gamma_{22} + \gamma_{33}) + (\gamma_{31}^2 + \gamma_{13}^2)(\gamma_{33} + \gamma_{11})] + c_{123} \gamma_{11} \gamma_{22} \gamma_{33} + c_{456} [\gamma_{12} \gamma_{23} \gamma_{31} + \gamma_{21} \gamma_{32} \gamma_{13}] \end{aligned} \tag{4}$$

wiedergeben.

Im Rahmen dieser Näherung (Berücksichtigung von dritten Potenzen in den Verzerrungen) treten also bei isotropen Medien zu den zwei bekannten LAMÉschen Konstanten μ und λ drei neue (MURNAGHANsche) Konstanten l, m und n hinzu, bei kubischen Kristallen zu den drei VOIGTschen Konstanten c_{11}, c_{12}, c_{44}, weitere sechs Konstanten c_{ikl}.

§ 2. Die Druckabhängigkeit der linearen elastischen Konstanten und der thermische Ausdehnungskoeffizient

Gewisse Kombinationen der MURNAGHANschen Konstanten lassen sich nach BIRCH [21] als Differentialquotienten der gewöhnlichen elastischen Konstanten nach dem hydrostatischen Druck p darstellen. Für isotrope Medien gilt im Grenzfall $p \to 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d} \ln G}{\mathrm{d}p} = \frac{1}{G} \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p} &= -\frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{\mu + 3m - \frac{1}{2} n}{2\mu + 3\lambda}\right) \\ &= -\frac{1}{G} \left(1 + \frac{G + 3m - \frac{1}{2} n}{3K}\right), \end{aligned} \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d} \ln K}{\mathrm{d}p} = \frac{1}{K} \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}p} = -2 \frac{9l + n}{(2\mu + 3\lambda)^2} = -\frac{2}{9} \frac{9l + n}{K^2}, \tag{6}$$

wobei $G = \mu$ der Schubmodul und $K = \lambda + \frac{2}{3} \mu$ der Kompressionsmodul ist.

Je nach Art der Versuchsführung hat man in Gl. (5) und Gl. (6) entweder den isothermen Kompressionsmodul K_{T} oder den adiabatischen Kompressionsmodul K_{S} einzusetzen. K_{T} und K_{S} hängen über die Gleichung

$$K_{\mathrm{S}} = K_{\mathrm{T}} \left(1 + \frac{T V \alpha^2 K_{\mathrm{T}}}{C_p}\right) \tag{7}$$

zusammen, wobei T die absolute Temperatur, V das spezifische Volumen, C_p die spezifische Wärme pro Mol und α der thermische Ausdehnungkoeffizient ist.

Der Faktor

$$d \equiv \frac{T V \alpha^2 K_{\mathrm{T}}}{C_p}$$

hat bei $T = 293$ °K folgende Zahlenwerte:

Cu: $d = 29{,}8 \cdot 10^{-3}$, Fe: $d = 18{,}8 \cdot 10^{-3}$.

Leitet man Gl. (7) nach p ab, so bekommt man, wenn man Gl. (16) sowie Gl. (18 b) und Gln. (19) mitbenützt und Glieder von der Ordnung d^2 vernachlässigt

$$\frac{\mathrm{d}K_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}p} - \frac{\mathrm{d}K_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}p} = d \left[\frac{2 K_{\mathrm{T}}}{\gamma_{\mathrm{h}}} \frac{\mathrm{d}\gamma_{\mathrm{h}}}{\mathrm{d}p} + 1\right]$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\gamma_{\mathrm{h}}}{\mathrm{d}p} = {} & \frac{1}{6} \frac{K_{\mathrm{T}}}{3 K_{\mathrm{T}} + 4 G} \left(3 \frac{\mathrm{d}^2 K}{\mathrm{d}p^2} + 4 \frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}p^2}\right) + \frac{1}{3} \frac{K_{\mathrm{T}}}{G} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}p^2} \\ & + \frac{1}{3} \left[2 \frac{G K_{\mathrm{T}}}{(3 K_{\mathrm{T}} + 4 G)^2} \left(3 \frac{\mathrm{d}K_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}p} + 4 \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}\right) + \frac{K_{\mathrm{T}}}{G} \cdot \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}\right] \\ & \cdot \left(\frac{1}{K_{\mathrm{T}}} \frac{\mathrm{d}K_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}p} - \frac{1}{G} \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

γ_{h} bedeutet dabei die nach Gl. (18 b) gegebene GRÜNEISEN-Konstante bei höheren Temperaturen.

** In der Definition der c_{ikl} folgen wir: F. BIRCH, Phys. Rev. **71**, 809 [1947].

[21] F. BIRCH, Phys. Rev. **71**, 809 [1947].

Die Zahlenwerte von $\mathrm{d}^2K/\mathrm{d}p^2$ sind Stoßwellenversuchen zu entnehmen [Gl. (14)], diejenigen von $\mathrm{d}^2G/\mathrm{d}p^2$ dürften in derselben Größenordnung liegen.

Bei Kupfer folgt dann für

$$\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}p^2} \approx \frac{\mathrm{d}^2K}{\mathrm{d}p^2} = -1\cdot 10^{-4}$$

und mit den bekannten elastischen Konstanten 2. Ordnung:

$$\frac{\mathrm{d}K_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}p} - \frac{\mathrm{d}K_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}p} \approx 1\cdot 10^{-2},$$

d. h. der relative Unterschied der isothermen und der adiabatischen Größen ist sicher nicht größer als 1% und somit in der Regel zu vernachlässigen.

Für kubische Kristallsysteme erhält BIRCH [21] unter denselben Bedingungen wie im isotropen Fall:

$$\frac{\mathrm{d}\,\frac{c_{11}+2\,c_{12}}{3}}{\mathrm{d}p} = -\frac{2}{3\,(c_{11}+2\,c_{12})}\,[3\,c_{111}+6\,c_{112}+c_{123}]\,, \tag{9 a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\frac{c_{11}-c_{12}}{2}}{\mathrm{d}p} = -\frac{1}{2\,(c_{11}+2\,c_{12})} \cdot [3\,(c_{11}+c_{12})+6\,c_{111}-c_{123}]\,, \tag{9 b}$$

$$\frac{\mathrm{d}c_{44}}{\mathrm{d}p} = -\frac{1}{c_{11}+2\,c_{12}}\,[c_{44}+c_{11}+2\,c_{12}+\tfrac{1}{2}\,c_{144}+c_{166}]\,. \tag{9 c}$$

BRIDGMAN [22] bestimmte bei einer Reihe von Stoffen $\mathrm{d}K/\mathrm{d}p$ durch Messung der Druckabhängigkeit des spezifischen Volumens. Eine statische Messung von $\mathrm{d}G/\mathrm{d}p$ gelang BRIDGMAN dadurch, daß er unter hydrostatischem Druck die Zusammendrückbarkeit von Spiralfedern, die ja durch G bestimmt ist, untersuchte. BIRCH [23] bestimmte $\mathrm{d}G/\mathrm{d}p$ dynamisch aus der Resonanzfrequenz von Torsionsschwingungen unter hydrostatischem Druck.

Weitere dynamische Messungen, unter anderem auch an Einkristallen, werden im § 4 und im Anhang besprochen.

$\mathrm{d}K/\mathrm{d}p$ kann auch durch Stoßwellenversuche [24–26], bei denen Drucke von 200 000 – 500 000 at auftreten, bestimmt werden.

Aus der Definitionsgleichung des Kompressionsmoduls $K(p)$

$$\frac{1}{K(p)} = -\frac{\mathrm{d}\ln V}{\mathrm{d}p} \tag{10}$$

und aus der Potenzreihenentwicklung

$$K(p) = K_0\,(1+\beta_1\,p+\tfrac{1}{2}\,\beta_2\,p^2) \tag{11}$$

folgt durch Integration über den Druck

$$-\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{p}{K_0} + \frac{1-K_0\,\beta_1}{2}\left(\frac{p}{K_0}\right)^2 + \frac{1-3\,K_0\,\beta_1+K_0^2\,(2\,\beta_1^2-\beta_2)}{6}\left(\frac{p}{K_0}\right)^3. \tag{12}$$

Diese Gleichung ist in die bei den Stoßwellenversuchen [24] gemessene Funktion

$$p = -A\left(\frac{\mathrm{d}V}{V}\right) + B\left(\frac{\mathrm{d}V}{V}\right)^2 - C\left(\frac{\mathrm{d}V}{V}\right)^3 \tag{13}$$

einzusetzen. Durch Koeffizientenvergleich folgt dann für $p \to 0$

$$K_0 = A\,,\quad \beta_1 = \frac{1}{K_0}\,\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}p} = \frac{1}{K_0}\left(\frac{2\,B}{K_0}+1\right), \tag{14}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{K_0}\,\frac{\mathrm{d}^2K}{\mathrm{d}p^2} = \frac{1}{K_0^2}\left[6\,\frac{C}{K_0} - \left(\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}p}-1\right)\left(\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}p}-2\right)\right].$$

Die aus den Messungen [24] erhaltenen Werte für K_0 und $\mathrm{d}K/\mathrm{d}p$ stimmen mit anderen Messungen relativ gut überein. Mit diesen beiden Werten ergibt sich dann bei Kupfer die zweite Ableitung des Kompressionsmoduls nach dem Druck zu:

$$\mathrm{d}^2K/\mathrm{d}p^2 = -1\cdot 10^{-4}\ \mathrm{mm^2/kp}\,.$$

Von russischen Autoren [27] ist die Druckabhängigkeit $\mathrm{d}E/\mathrm{d}p$ des Elastizitätsmoduls E isotroper Stoffe bestimmt worden. Diese drückt sich in $\mathrm{d}G/dp$ und $\mathrm{d}K/\mathrm{d}p$ gemäß

$$\frac{1}{E_0}\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p} \approx \frac{1}{3+\frac{G}{K}}\left(3\,\frac{1}{G}\,\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p} + \frac{G}{K}\,\frac{1}{K}\,\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}p}\right) \tag{15}$$

aus.

Die thermische Ausdehnung von Kristallen hängt bekanntlich mit der Anharmonizität der elastischen Eigenschaften zusammen. Es ist dabei zweckmäßig, an Stelle des kubischen thermischen Ausdehnungskoeffizienten α die sogenannte GRÜNEISEN-Konstante

$$\gamma = \frac{\alpha\,V\,K_{\mathrm{S}}}{C_p} \tag{16}$$

zu betrachten.

[22] P. W. BRIDGMAN, Physics of High Pressure, Bell & Sons, London 1949.
[23] F. BIRCH, J. Appl. Phys. **8**, 129 [1937].
[24] J. M. WALSH, M. H. RICE, R. G. MCQUEEN u. F. L. YARGER, Phys. Rev. **108**, 196 [1957].
[25] D. BANCROFT, E. L. PETERSON u. S. MINSHALL, J. Appl. Phys. **27**, 291 [1957].
[26] M. H. RICE, R. G. MCQUEEN u. J. M. WALSH, Compression of Solids by Strong Shockwaves, Solid State Physics, Bd. **6** [1958].
[27] A. P. EKHLAKOV, V. A. GLADKOVSKII u. K. P. RODIONOV, Phys. Metals Metallogr. **5**, 169 [1957].

Die thermische Bewegung in einem Kristall von $(N+1)$ Atomen kann man durch Überlagerung von $3N$ Wellen behandeln. Die GRÜNEISEN-Konstante des Kristalls läßt sich aus den GRÜNEISEN-Konstanten $\gamma_{\mathfrak{q},p}$ der einzelnen Wellen (Wellenvektor $\mathfrak{q}$, Polarisationsrichtung $p=1,2,3$) gemäß

$$\gamma = \sum_{\mathfrak{q},p} \gamma_{\mathfrak{q},p} C_{\mathfrak{q},p} \Big/ \sum_{\mathfrak{q},p} C_{\mathfrak{q},p} \tag{17 a}$$

aufbauen, wobei

$$C_{\mathfrak{q},p} = k \left(\frac{\hbar\,\omega_{\mathfrak{q},p}}{k\,T}\right)^2 \frac{\exp(\hbar\,\omega_{\mathfrak{q},p}/k\,T)}{\{\exp(\hbar\,\omega_{\mathfrak{q},p}/k\,T)-1\}^2} \tag{17 b}$$

der Anteil jeder einzelnen Welle zur spezifischen Wärme ist[28,29].

In Gl. (17 b) bedeutet k die BOLTZMANN-Konstante, $\hbar$ die durch 2π dividierte PLANCKsche Konstante und $\omega_{\mathfrak{q},p}$ die Kreisfrequenz der Wellen $(\mathfrak{q},p)$. Die $\gamma_{\mathfrak{q},p}$ sind folgendermaßen definiert:

$$\gamma_{\mathfrak{q},p} = -\left(\frac{\mathrm{d}\ln\omega_{\mathfrak{q},p}}{\mathrm{d}\ln V}\right)_T . \tag{17 c}$$

Die Summation über den $\mathfrak{q}$-Raum in Gl. (17 a) läßt sich in bekannter Weise durch eine Integration ersetzen und für ein isotropes Medium in den Grenzfällen tiefer Temperaturen $T \ll \Theta$ und hoher Temperaturen $T \geqq \Theta$ (Θ = DEBYEsche Temperatur) geschlossen ausführen. Bezeichnet c_{long} und c_{trans} die longitudinalen und transversalen Schallgeschwindigkeiten, so gilt für tiefe Temperaturen

$$\gamma_{\mathrm{t}} = \frac{\left[\frac{1}{c_{\mathrm{long}}^3}\left(\frac{1}{3} - \frac{\partial \ln c_{\mathrm{long}}}{\partial \ln V}\right) + 2\,\frac{1}{c_{\mathrm{trans}}^3}\left(\frac{1}{3} - \frac{\partial \ln c_{\mathrm{trans}}}{\partial \ln V}\right)\right]}{\left(\frac{1}{c_{\mathrm{long}}^3} + 2\,\frac{1}{c_{\mathrm{trans}}^3}\right)} \tag{18 a}$$

und für hohe Temperaturen

$$\gamma_{\mathrm{h}} = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{\partial \ln c_{\mathrm{long}}}{\partial \ln V}\right) + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{\partial \ln c_{\mathrm{trans}}}{\partial \ln V}\right)\right]. \tag{18 b}$$

Für die Volumabhängigkeiten der Schallgeschwindigkeiten in einem isotropen Medium erhält man mit BRILLOUIN[30]

$$\frac{1}{3} - \frac{\partial \ln c_{\mathrm{long}}}{\partial \ln V} = -\frac{1}{6} + \frac{2K}{3K+4G}\left[\frac{3}{4}\,\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}p} + \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}\right], \tag{19 a}$$

$$2\left(\frac{1}{3} - \frac{\partial \ln c_{\mathrm{trans}}}{\partial \ln V}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{K}{G}\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}\right). \tag{19 b}$$

Unterstellt man, daß die Temperaturabhängigkeit von $\mathrm{d}K/\mathrm{d}p$ und $\mathrm{d}G/\mathrm{d}p$ nur sehr klein ist und daß die normalen elastischen Konstanten mit steigender Temperatur abnehmen[31,32], d. h.

$$K_{\text{tiefe Temp.}} = K_{\text{hohe Temp.}} + \Delta K = K + \Delta K\,,$$
$$G_{\text{tiefe Temp.}} = G_{\text{hohe Temp.}} + \Delta G = G + \Delta G \tag{20}$$

und $\quad \dfrac{\Delta K}{K} \ll 1\,, \quad \dfrac{\Delta G}{G} \ll 1\,,$

so lassen sich die Gln. (18) und (19) folgendermaßen schreiben:

$$\gamma_{\mathrm{t}} = \frac{(G+\Delta G)^{3/2} A_{\mathrm{t}} + 2[\frac{4}{3}(G+\Delta G) + (K+\Delta K)]^{3/2} B_{\mathrm{t}}}{(G+\Delta G)^{3/2} + 2[\frac{4}{3}(G+\Delta G) + (K+\Delta K)]^{3/2}}, \tag{21 a}$$

$$\gamma_{\mathrm{h}} = \frac{1}{3}\,(A_{\mathrm{h}} + 2\,B_{\mathrm{h}})\,, \tag{21 b}$$

wobei

$$A_{\mathrm{t}} = -\frac{1}{6} + \frac{2(K+\Delta K)}{3(K+\Delta K)+4(G+\Delta G)}\left[\frac{3}{4}\,\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}p} + \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}\right],$$

$$B_{\mathrm{t}} = -\frac{1}{6} + \frac{(K+\Delta K)}{2(G+\Delta G)}\,\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p},$$

$$A_{\mathrm{h}} = -\frac{1}{6} + \frac{2K}{3K+4G}\left[\frac{3}{4}\,\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}p} + \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}\right] = A\,,$$

$$B_{\mathrm{h}} = -\frac{1}{6} + \frac{K}{2G}\,\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p} = B$$

ist. Die Gln. (21 a) und (21 b) können nun bei gemessenem γ_{t} und γ_{h} nach $\mathrm{d}K/\mathrm{d}p$ und $\mathrm{d}G/\mathrm{d}p$ aufgelöst werden:

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}p} = \frac{2}{3K}\left[(3K+4G)\,A - 4\,G\,B + \tfrac{1}{2}K\right], \tag{22 a}$$

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p} = \frac{2G}{K}\left[B + \frac{1}{6}\right] \tag{22 b}$$

mit $$A = A_0 - \frac{3A_0}{x_1-x_2}\left\{2\,x_1 y_1 - 2\,x_2 y_2 + \frac{x_1 x_2}{x_1+2\,x_2}\,y_3\right\} - \frac{3\,x_2}{x_1-x_2}\left\{6\,y_2 - \frac{x_1}{x_1+2\,x_2}\,y_3\right\}\gamma_{\mathrm{h}} - \frac{x_1 y_1 + 2\,x_2 y_2}{x_1-x_2},$$

$$B = B_0 - \frac{3B_0}{x_1-x_2}\left\{2\,x_1 y_1 - 2\,x_2 y_2 + \frac{x_1 x_2}{x_1+2\,x_2}\,y_3\right\} + \frac{3\,x_1}{x_1-x_2}\left\{3\,y_1 + \frac{x_2}{x_1+2\,x_2}\,y_3\right\}\gamma_{\mathrm{h}} + \frac{x_1 y_1 + 2\,x_2 y_2}{x_1-x_2},$$

28 J. C. SLATER, Introduction to Chemical Physics, McGraw-Hill, New York-London 1939.

29 F. W. SHEARD, Phil. Mag. **8** (3), 1381 [1958].

30 L. BRILLOUIN, Les Tenseurs en Mécanique, Masson, Paris 1949.

31 W. C. OVERTON u. J. GAFFNEY, Phys. Rev. **98**, 969 [1955].

32 P. H. SUTTON, Phys. Rev. **91**, 816 [1953].

$$A_0 = \frac{(x_1+2\,x_2)\,\gamma_t - 3\,x_2\,\gamma_h}{x_1 - x_2}\,, \quad B_0 = \frac{3\,x_1\,\gamma_h - (x_1+2\,x_2)\,\gamma_t}{2\,(x_1-x_2)}\,,$$

$$x_1 = G^{3/2}, \qquad x_2 = (\tfrac{4}{3}G + K)^{3/2},$$

$$y_1 = \frac{2\,G}{3\,(3\,K+4\,G)}\left(\frac{\Delta K}{K} - \frac{\Delta G}{G}\right),$$

$$y_2 = \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta K}{K} - \frac{\Delta G}{G}\right),$$

$$y_3 = -\frac{9}{2}\,\frac{K}{(3\,K+4\,G)}\left(\frac{\Delta K}{K} - \frac{\Delta G}{G}\right).$$

Für Kupfer sind die GRÜNEISEN-Konstanten von SIMMONS und BALLUFFI [33] zu

$$\gamma_h \approx 2{,}0\,, \qquad \gamma_t \approx 1{,}75$$

gemessen worden. Aus den Messungen [31] erhält man, wenn die anisotropen elastischen Konstanten 2. Ordnung nach LEIBFRIED [34] in die mittleren isotropen umgerechnet werden

$$\Delta K \approx 0{,}9 \cdot 10^3\ \mathrm{kp/mm^2}\,,$$
$$\Delta G \approx 0{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{kp/mm^2}\,.$$

Demnach folgt für die Ableitung der elastischen Konstanten 2. Ordnung nach dem Druck

$$\mathrm{d}K/\mathrm{d}p \approx 6{,}0\,,$$
$$\mathrm{d}G/\mathrm{d}p \approx 1{,}4\,.$$

Umgekehrt haben wir für Aluminium aus $\mathrm{d}K/\mathrm{d}p$ und $\mathrm{d}G/\mathrm{d}p$ (siehe Tab. 1) sowie ΔK und ΔG [32] die GRÜNEISEN-Konstanten γ_h und γ_t berechnet und konnten damit die Messungen von FIGGINS, JONES und RILEY [35] bestätigen.

Als Regel folgt, daß für $\gamma_t < \gamma_h$ auch

$$\mathrm{d}\ln G/\mathrm{d}p < \mathrm{d}\ln K/\mathrm{d}p$$

und umgekehrt ist.

§ 3. Statische Bestimmung der Murnaghanschen Konstanten

a) Poynting-Effekt vielkristalliner Materialien

Eine statische Bestimmung zweier elastischer Konstanten dritter Ordnung ist möglich mit Hilfe des POYNTING-Effektes [16, 17], der bei der Torsion um den Winkel φ eines vielkristallinen (isotropen) Drahtes mit der Länge l_0 und dem Radius R_0 eine Radiusverkleinerung $\Delta R/R_0$ und eine Dehnung des Zylinders in Achsenrichtung $\Delta l/l_0$ zeigt. Wir verweisen auf die mathematische Behandlung dieses Problems durch MURNAGHAN [15], Seite 130 – 137. Daraus ergibt sich für die relative Änderung des Radius:

$$\frac{\Delta R}{R_0} = -\frac{\varphi^2\,R_0^2}{32\,\mu(2\,\mu+3\,\lambda)\,l_0^2}\,[8\,\mu(2\,\mu+\lambda) + 8\,\mu\,m - (2\,\mu+\lambda)\,n]\,, \tag{23 a}$$

für die relative Änderung der Länge:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = -\frac{\varphi^2\,R_0^2}{16\,\mu(2\,\mu+3\,\lambda)\,l_0^2}\,[4\,\mu(2\,\mu+\lambda) + 4\,\mu\,m + \lambda\,n]\,. \tag{23 b}$$

Die relative Änderung des Drahtvolumens läßt sich in $\mathrm{d}G/\mathrm{d}p$ ausdrücken:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta l}{l_0} + 2\,\frac{\Delta R}{R_0} = \frac{\varphi^2\,R_0^2}{4\,l_0^2}\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p} - \frac{G}{K}\right). \tag{23 c}$$

b) Spannungs – Dehnungsbeziehung von kubischen Einkristallen

BRENNER [18] konnte mit Eisen-whiskers eine reversible Abweichung vom HOOKEschen Gesetz

$$\varepsilon = P/E + \delta\,(P/E)^2 \tag{24}$$

nachweisen. Die Krümmung $2\,\delta$ dieser Kurve ist eine Funktion von anisotropen Konstanten dritter Ordnung.

Wird ein Kristall in $\langle 001 \rangle$-Richtung gezogen, so wird ein Punkt mit den Anfangskoordinaten (a, b, c) nach

$$\begin{aligned} x &= (1 - \nu\,k + \beta\,k^2)\,a\,,\\ y &= (1 - \nu\,k + \beta\,k^2)\,b\,,\\ z &= (1 + k + \delta\,k^2)\,c \end{aligned} \tag{25}$$

verschoben. Aus der linearen Elastizitätstheorie folgt

$$\nu = c_{12}/(c_{11}+c_{12})\,, \quad E = c_{11} - 2\,c_{12}\,\nu\,, \quad k = P/E. \tag{26}$$

Anwendung der Störungsrechnung ergibt für die halbe Krümmung

$$\delta = \delta_1 \equiv -\frac{3}{2} + \frac{3\,\{2\,c_{12}\,\nu^2 - (c_{11}+c_{12})\}\,c_{111} + 2\,\{(2\,c_{12}-c_{11})\,\nu^2 + 2\,c_{11}\,\nu + c_{12}\}\,c_{112} - \{(c_{11}+c_{12})\,\nu + 2\,c_{12}\}\,\nu\,c_{123}}{c_{11}(c_{11}+c_{12}) - 2\,c_{12}^2}\,. \tag{27}$$

[33] R. O. SIMMONS u. R. W. BALLUFFI, Phys. Rev. **108**, 278 [1957].

[34] G. LEIBFRIED, Z. Phys. **135**, 23 [1953].

[35] B. F. FIGGINS, G. O. JONES u. D. P. RILEY, Phil. Mag. **8** (1), 747 [1956].

In ähnlicher Weise wird die halbe Krümmung bei Zug in $\langle 011 \rangle$-Richtung

$$\delta = \delta_2 \equiv \frac{2\,c_{11}\,c_{44}(B+C) - 4\,c_{12}\,c_{44}\,A - [c_{11}(c_{11}+c_{12}) - 2\,c_{12}^2](B-C)}{4\,c_{44}[c_{11}(c_{11}+c_{12}) - 2\,c_{12}^2]} \tag{28}$$

mit
$$A = -\,[\tfrac{1}{2}c_{11}\,\nu^2 + \tfrac{1}{2}c_{12}(1+\gamma^2) + 3\,c_{111}\,\nu^2 + c_{112}(\tfrac{1}{2} - 2\,\nu - \gamma + 2\,\nu\,\gamma + \tfrac{1}{2}\gamma^2) + \tfrac{1}{4}c_{144}(1+\gamma)^2 + \tfrac{1}{4}c_{123}(1-\gamma)^2],$$

$$B = -\left[\tfrac{1}{2}c_{12}\,\nu^2 + \frac{c_{11}+c_{12}}{4}(1+\gamma)^2 + \frac{c_{44}}{2}(\gamma^2-1) + \tfrac{3}{4}c_{111}(1-\gamma)^2 + c_{112}\{\nu^2 + \nu(\gamma-1) + \tfrac{3}{4}(1-\gamma)^2\} + \tfrac{1}{2}c_{144}\,\nu(1+\gamma) - \tfrac{1}{4}c_{166}(1-2\,\gamma-3\,\gamma^2) - \tfrac{1}{2}c_{123}\,\nu(1-\gamma)\right],$$

$$C = -\left[E + \tfrac{1}{2}c_{12}\,\nu^2 + \frac{c_{11}+c_{12}}{4}(1+\gamma^2) + \frac{c_{44}}{2}(1-\gamma^2) + \tfrac{3}{4}c_{111}(1-\gamma)^2 + c_{112}\{\nu^2 + \nu(\gamma-1) + \tfrac{3}{4}(1-\gamma)^2\} - \tfrac{1}{2}c_{144}\,\nu(1+\gamma) + \tfrac{1}{4}c_{166}(3+2\,\gamma-\gamma^2) + \tfrac{1}{2}c_{123}\,\nu(\gamma-1)\right],$$

$$\nu = \frac{4\,c_{12}\,c_{44}}{c_{11}[c_{11}+c_{12}+2\,c_{44}] - 2\,c_{12}^2}, \qquad \gamma = \frac{c_{11}[c_{11}+c_{12}-2\,c_{44}] - 2\,c_{12}^2}{c_{11}[c_{11}+c_{12}+2\,c_{44}] - 2\,c_{12}^2}, \qquad E = \frac{4\,c_{44}[c_{11}(c_{11}+c_{12}) - 2\,c_{12}^2]}{c_{11}[c_{11}+c_{12}+2\,c_{44}] - 2\,c_{12}^2}$$

und in $\langle 111 \rangle$-Richtung
$$\delta = \delta_3 \equiv \frac{c_{44}(2\,A+B) - (c_{11}+2\,c_{12})(A-B)}{9\,c_{44}(c_{11}+2\,c_{12})} \tag{29}$$

mit
$$A = -\,[(c_{11}+2\,c_{12})(\nu^2+\tfrac{1}{2}) + c_{44}(\nu^2-1) + \tfrac{1}{3}(3\,c_{111}+6\,c_{112}+c_{123})(1-2\,\nu)^2 + (c_{144}+2\,c_{166})\,\nu(1+\nu) - \tfrac{1}{3}c_{456}(1+\nu)^2],$$

$$B = -\,[3\,E + (c_{11}+2\,c_{12})(\nu^2+\tfrac{1}{2}) - 2\,c_{44}(\nu^2-1) + \tfrac{1}{3}(3\,c_{111}+6\,c_{112}+c_{123})(1-2\,\nu)^2 + (c_{144}+2\,c_{166})(1-\nu^2) + \tfrac{2}{3}c_{456}(1+\nu)^2],$$

$$\nu = \frac{c_{11}+2\,c_{12}-2\,c_{44}}{2(c_{11}+2\,c_{12})+2\,c_{44}}, \qquad E = \tfrac{1}{3}[(c_{11}+2\,c_{12}+4\,c_{44}) - (2\,c_{11}+4\,c_{12}-4\,c_{44})\nu].$$

§ 4. Bestimmung der Konstanten dritter Ordnung aus Schallgeschwindigkeitsmessungen

Werden mit Hilfe von Ultraschall die Schallgeschwindigkeiten v unter hinreichend großen elastischen Vorspannungen gemessen, so können die elastischen Konstanten 3. Ordnung ermittelt werden. Messungen unter hydrostatischem Druck, wie sie von verschiedenen Autoren beschrieben werden, liefern die schon in § 3 besprochenen Kombinationen der Konstanten dritter Ordnung. Hughes und Kelly [19] beschreiben eine Apparatur, mit der Schallgeschwindigkeiten auch unter einachsigem Druck P_1 gemessen werden können. Für isotrope Medien der Dichte ϱ_0 im unverformten Zustand leiten diese Autoren die folgenden sieben Gleichungen ab:

a) Hydrostatischer Druck

Longitudinalwelle:

$$\varrho_0\,v^2 = (2\,\mu+\lambda) - \frac{p}{3\,K}[10\,\mu + 7\,\lambda + 6\,l + 4\,m]; \tag{30 a}$$

Transversalwelle:

$$\varrho_0\,v^2 = \mu - \frac{p}{3\,K}[3(2\,\mu+\lambda) + 3\,m - \tfrac{1}{2}n]. \tag{30 b}$$

b) Druck und Wellenausbreitung in x-Richtung

Longitudinalwelle:

$$\varrho_0\,v^2 = (2\,\mu+\lambda) - \frac{P_1}{3\,K}\left[\frac{\mu+\lambda}{\mu}(10\,\mu+4\,\lambda+4\,m) + \lambda + 2\,l\right]; \tag{30 c}$$

Transversalwelle:

$$\varrho_0\,v^2 = \mu - \frac{P_1}{3\,K}\left[4(\mu+\lambda) + \frac{\lambda}{4\,\mu}n + m\right]. \tag{30 d}$$

c) Druck in x-Richtung, Wellenausbreitung in y-Richtung

Longitudinalwelle:

$$\varrho_0\,v^2 = (2\,\mu+\lambda) - \frac{P_1}{3\,K}\left[2\,l - \frac{2\,\lambda}{\mu}(2\,\mu+\lambda+m)\right]; \tag{30 e}$$

1. Transversalwelle, Teilchenrichtung ist die z-Richtung

$$\varrho_0\, v^2 = \mu - \frac{P_1}{3\,K}\left[m - 2\,\lambda - \frac{\mu+\lambda}{2\,\mu}\,n\right]; \qquad (30\,\text{f})$$

2. Transversalwelle, Teilchenrichtung ist die x-Richtung

$$\varrho_0\, v^2 = \mu - \frac{P_1}{3\,K}\left[2\,\mu + \lambda + m + \frac{\lambda}{4\,\mu}\,n\right]. \qquad (30\,\text{g})$$

Die entsprechenden Gleichungen für kubische Einkristalle werden im Anhang abgeleitet und auf die Messungen von BATEMAN, MASON und MCSKIMMIN [20] angewendet.

§ 5. Lichtbeugung an Ultraschallwellen

Die Nichtlinearität der Druck – Volumenbeziehung führt in Flüssigkeiten zu einer Verzerrung einer anfänglich sinusförmigen Ultraschallwelle [36, 37]. In den Beugungsmaxima einer senkrecht zur Schallwellenrichtung einfallenden Lichtwelle treten dann zusätzlich höhere FOURIER-Komponenten auf, so daß das Beugungsbild nicht mehr symmetrisch zum Beugungsmaximum 0. Ordnung ist. Diese Methode könnte auch auf durchsichtige Festkörper zur Bestimmung der nichtlinearen Konstanten übertragen werden. Eine Berechnung der zu erwartenden Effekte liegt allerdings noch nicht vor.

§ 6. Numerische Werte der isotropen Konstanten dritter Ordnung

Wir geben eine Zusammenstellung der wichtigsten uns bekannten Meßdaten über die Konstanten dritter Ordnung.

Der POYNTING-Effekt [Gln. (23 a) und (23 b)] und die Kenntnis von $\mathrm{d}G/\mathrm{d}p$ und $\mathrm{d}K/\mathrm{d}p$ erlauben bei Cu und Fe eine Bestimmung von l, m und n. Wir

Material	G_0 kp/mm²	K_0 kp/mm²	$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}$	s. Anm.	$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}p}$	s. Anm.	$\frac{1}{E_0}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}$ gemessen mm²/kp	s. Anm.	$\frac{1}{E_0}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}$ berechnet mm²/kp	γ_{h} gemessen	s. Anm.	γ_{h} berechnet
					4,0	39						
			2,6	39	2,77	41						
					4,32	42						
Al	$2{,}67 \cdot 10^3$	$7{,}4 \cdot 10^3$	2,03	23	3,23	24	$7{,}2 \cdot 10^{-4}$	27	$7{,}4 \cdot 10^{-4}$	2,26	29	2,56
					(6,71)	41						
			2,03	40,34	(2,33)	41						
					5,19	40,34						
			Mittelwert: 2,2		Mittelwert: 3,9							
					3,03	41						
					5,08	42						
			1,29	23	(3,04)	24						
Cu	$4{,}77 \cdot 10^3$	$13{,}9 \cdot 10^3$			(8,87)	41	$4{,}3 \cdot 10^{-4}$	27	$3{,}1 \cdot 10^{-4}$	2,0	29	2,03
			1,64	43,34	5,59	43,34						
			Mittelwert: 1,4		Mittelwert: 4,9							
			(3,4)	39	4,3	39						
			1,95	23	(3,59)	41						
Fe	$8{,}26 \cdot 10^3$	$17{,}0 \cdot 10^3$	1,78	44	(2,67)	25	$2{,}3 \cdot 10^{-4}$	27	$2{,}3 \cdot 10^{-4}$			1,8
			1,95	41	3,74	42						
			1,88	41								
			Mittelwert: 1,9		Mittelwert: 4,0							
			1,46	23	6,17	42						
Ni	$8 \cdot 10^3$	$21{,}8 \cdot 10^3$	1,44	44	3,14	24						

Tab. 1. Druckabhängigkeiten der elastischen Konstanten und GRÜNEISEN-Konstanten einiger Metalle.

[36] M. A. BREAZEALE u. E. A. HIEDEMANN, Naturwiss. **45**, 157 [1958].

[37] K. L. ZANKEL u. E. A. HIEDEMANN, Naturwiss. **45**, 157 [1958].

haben dabei zunächst die nach den Gln. (15) und (16) wahrscheinlichsten Werte von dG/dp und dK/dp (siehe Tab. 1) ausgewählt – eingeklammerte Werte wurden nicht berücksichtigt. Ihren Zusammenhang mit den MURNAGHANschen Konstanten ergeben Gln. (5) und (6). Diese beiden Gleichungen wurden mit Gewichten belegt. Diese Gewichte sind gleich der Zahl der gemessenen druckabhängigen Konstanten, deren Mittelwert den uns wahrscheinlichsten Wert für dG/dp bzw. dK/dp ergibt. Bei Eisen wurden die Messungen des POYNTING-Effekts mit dem Gewicht 2 belegt, bei Kupfer nur mit 1 (siehe Tab. 2). Mit Hilfe einer Ausgleichsrechnung [38] wurde dann l, m und n bestimmt. Sie sind alle drei negativ und etwa eine Zehnerpotenz größer als die elastischen Konstanten zweiter Ordnung (siehe Tab. 3).

Material	$\frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon_l$ (für $\varphi = 2\pi$)	$\frac{\Delta R}{R_0} = \varepsilon_R$ (für $\varphi = 2\pi$)
Stahldraht I $2\,R_0 = 0{,}986$ mm $l_0 = 1605$ mm	$1{,}71 \cdot 10^{-6}$	$-3{,}19 \cdot 10^{-7}$
Stahldraht II $2\,R_0 = 1{,}210$ mm $l_0 = 1605$ mm	$2{,}9 \cdot 10^{-6}$	$-5{,}24 \cdot 10^{-7}$
Kupferdraht $2\,R_0 = 1{,}219$ mm $l_0 = 1605$ mm	$4{,}25 \cdot 10^{-6}$	$-17{,}5 \cdot 10^{-7}$

Tab. 2. Messungen des POYNTING-Effekts [16, 17].

Material	m kp/mm²	n kp/mm²	l kp/mm²
Cu	$(-6{,}2 \pm 0{,}1)\,10^4$	$(-15{,}9 \pm 0{,}2)\,10^4$	$(-1{,}6 \pm 0{,}7)\,10^4$
Fe	$(-7{,}7 \pm 0{,}1)\,10^4$	$(-15{,}2 \pm 0{,}1)\,10^4$	$(-1{,}7 \pm 0{,}4)\,10^4$

Tab. 3. MURNAGHANsche Konstanten von Cu und Fe.

Zu etwas anderen Zahlenwerten von l, m, n gelangt man, wenn man von der Annahme [9] ausgeht, daß die experimentellen Werte von dK/dp und dG/dp sehr viel genauer als die POYNTINGschen Werte sind. Man trage in ein m, n-Koordinatensystem die Funktion $dG/dp = f_1(m, n)$ und den aus den POYNTING-Messungen erhaltenen Punkt m, n ein. Von diesem Punkt aus fälle man das Lot auf die Gerade dG/dp. Der Fußpunkt dieses Lotes bildet dann den günstigsten Wert von m und n. Damit läßt sich aus der Funktion $dK/dp = f_2(n, l)$ der Wert von l berechnen. Die allgemeinen Formeln für das Verzerrungsfeld von Stufenversetzungen im Rahmen der quadratischen Elastizitätstheorie [6] wurden mit diesen Werten von l, m und n von SEEGER und BROSS [9] numerisch ausgewertet.

In Tab. 4 sind weitere Elemente und Verbindungen aufgeführt, von denen dG/dp und dK/dp bekannt ist. Darüber hinaus sind Meßdaten von dK/dp reiner Metalle im Handbook of Physical Constants [41] und in der Literatur über Stoßwellenversuche [24, 25] zu finden. An CuNi wurde dG/dp gemessen [23]. Weitere druckabhängige Konstanten von Halogeniden sind unter [21, 22, 46, 47] zu finden, solche von Quarz

Material	$\frac{1}{G_0}\frac{dG}{dp}$ mm²/kp	Anm.	$\frac{1}{K_0}\frac{dK}{dp}$ mm²/kp	Anm.
Ag	$\frac{dG}{dp} = 1{,}64$	43, 34	$\frac{dK}{dp} = 6{,}18$	43, 34
			$6{,}38 \cdot 10^{-4}$	42
			$2{,}68 \cdot 10^{-4}$	41
			$3{,}63 \cdot 10^{-4}$	24
Au	$\frac{dG}{dp} = 1{,}25$	43, 34	$\frac{dK}{dp} = 6{,}43$	43, 34
			$6{,}27 \cdot 10^{-4}$	41
			$2{,}94 \cdot 10^{-4}$	24
Mo	$0{,}15 \cdot 10^{-4}$	22	$8{,}05 \cdot 10^{-5}$	24
			$-2{,}02 \cdot 10^{-4}$	41
Pd	$1{,}1 \cdot 10^{-4}$	22	$2{,}84 \cdot 10^{-4}$	41
Pt	$2{,}4 \cdot 10^{-4}$	22	$1{,}60 \cdot 10^{-4}$	24
			$1{,}29 \cdot 10^{-4}$	41
Ta	$0{,}3 - 1{,}5 \cdot 10^{-4}$	22	$1{,}33 \cdot 10^{-4}$	24
			$5{,}03 \cdot 10^{-4}$	41
Th	$5{,}7 \cdot 10^{-4}$	22	$2{,}20 \cdot 10^{-4}$	24
			$1{,}10 \cdot 10^{-3}$	41
W	$1{,}4 \cdot 10^{-4}$	21	$8{,}49 \cdot 10^{-4}$	41
Zr	$-0{,}17 \cdot 10^{-4}$	21	$1{,}25 \cdot 10^{-3}$	41
			$5{,}76 \cdot 10^{-5}$	24
CuZn	$3{,}5 \cdot 10^{-4}$	45, 34	$3{,}08 \cdot 10^{-4}$	24
			$3{,}80 \cdot 10^{-4}$	45, 34
NaCl	$1{,}1 \cdot 10^{-3}$	45, 34	$2{,}46 \cdot 10^{-3}$	45, 34
KCl	$0{,}8 \cdot 10^{-3}$	45, 34	$2{,}61 \cdot 10^{-3}$	45, 34

Tab. 4. Druckabhängige elastische Konstanten von weiteren Metallen, Alkalihalogeniden und CuZn.

38 R. ZURMÜHL, Prakt. Mathematik, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953.

39 D. S. HUGHES u. C. MAURETTE, J. Appl. Phys. **27**, 1184 [1956].

40 R. E. SCHMUNK u. C. S. SMITH, J. Phys.-Chem. Solids, Pergamon Press, New York 1958, Vol. 7.

41 F. BIRCH, Handbook of Physical Constants, Geol. Soc. Amer. Special Papers No. 36.

42 P. W. BRIDGMAN, Proc. Amer. Acad. **70**, 285 [1940].

43 W. B. DANIELS u. C. S. SMITH, Phys. Rev. Letters **1**, 43 [1958].

44 P. W. BRIDGMAN, Proc. Amer. Acad. **64**, 39 [1935].

45 D. LAZARUS, Phys. Rev. **76**, 545 [1949].

46 S. LUSANA, Nuovo Cim. **7**, 1 [1904].

47 T. W. RICHARDS, Carnegie Inst. Washington, No. **76**, 44 [1903].

bei [23, 39, 48]. $\frac{1}{K_0} \frac{dK}{dp}$ von einigen Nitriden, Karbiden, Sulfiden und Oxyden sind bei [21] aufgeführt. Im Anhang sind die elastischen Konstanten 3. Ordnung von Germanium angegeben. Diejenigen Werte dG/dp und dK/dp, die aus Einkristalldaten gewonnen wurden, sind nach der Formel von LEIBFRIED [34] umgerechnet worden; sie tragen in Tab. 1 und Tab. 4 die zweite Zitatnummer 34.

In Tab. 5 sind zunächst die berechneten Elastizitätsmoduln für verschiedene Orientierungen angegeben. Vergleichsweise sind dazu die von BRENNER [18] an zwei Fe-whiskers gemessenen E-Moduln wiedergegeben. Demnach hat der eine whisker die Orientierung $\langle 111 \rangle$, der zweite hat keine Hauptrichtung als Stabachse. Für beide whiskers sind die Krümmungen $2\,\delta$ der Spannungs – Dehnungskurve angegeben. Berechnet man aus den in Tab. 4 angegebenen MURNAGHANschen Konstanten von Eisen die Krümmung $2\,\delta$ der Spannungs – Dehnungs-Beziehung von isotropem Eisen, so ist $2\,\delta = 10{,}8$. Dieser Wert ist in derselben Größenordnung wie für die beiden whiskers, so daß die von uns vorgenommene Auswertung der BRENNERschen Messungen sinnvoll erscheint.

Orientierung	E_0 berechnet kp/mm²	E_0 gemessen kp/mm²	Krümmung 2δ
$<111>$	29100	30000	8,6
$<011>$	21000	18500	7,6
$<001>$	13500		
Isotrop		21000	10,8

Tab. 5. Die BRENNERschen Messungen [18] an Fe-whiskers.

Die Verfasser danken Herrn Dr. W. P. MASON, Murray Hill, N. J., für die Mitteilung der Meßergebnisse an Germanium sowie für die kritische Durchsicht der Rechnung im Anhang, an dem freundlicherweise Herr cand. phys. R. HABERKORN mitgewirkt hat. Herrn Dr. H. BROSS haben wir für wertvolle Hinweise und Diskussionen zu danken.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft sei für die finanzielle Unterstützung der Arbeit gedankt.

Anhang

In diesem Anhang leiten wir die Erweiterung der Gln. (30) von § 4 für den Fall kubischer Einkristalle ab, wobei wir uns auf jene Kombinationen ϱv^2 bzw. $\varrho_0 v^2$ beschränken, die bei den Versuchen von MASON, McSKIMMIN und BATEMAN [20] experimentell bestimmt wurden (ϱ = Dichte im vorverformten Zustand).

Einer durch den Druck verursachten statischen Verschiebung wird eine durch die elastische Welle verursachte dynamische Verschiebung $\mathfrak{u} = (u, v, w)$ überlagert. Beide zusammen genügen der elastischen Differentialgleichung [15]

$$(\mathrm{div}_x\, \boldsymbol{\sigma}) = \varrho \frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial t^2} \tag{31}$$

mit

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\varrho}{\varrho_0} \boldsymbol{J} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \tilde{\boldsymbol{J}}$$

(Spannungstensor im Endkoordinatensystem).

Die erste Komponente der elastischen Differentialgleichung lautet dann in allgemeiner Form:

$$\begin{aligned}
&c_{11}\, u_{aa} + c_{12}(v_{ab} + w_{ac}) + c_{44}(u_{bb} + u_{cc} + v_{ab} + w_{ac}) \\
&+ c_{11}[(2\,u_a - v_b - w_c)\, u_{aa} + v_b\, u_{bb} + w_c\, u_{cc} + v_a\, v_{aa} + u_b\, v_{bb} + w_a\, w_{aa} + u_c\, w_{cc}] \\
&+ c_{12}[(v_b + w_c)\, u_{aa} + (u_a + w_c)\, u_{bb} + (u_a + v_b)\, u_{cc} + 2\,u_b\, u_{ab} + 2\,u_c\, u_{ac} - w_c\, v_{ab} + v_c\, v_{ac} \\
&\qquad + u_c\, v_{bc} + w_b\, w_{ab} - v_b\, w_{ac} + u_b\, w_{bc}] \\
&+ c_{44}[(u_a - v_b - w_c)(u_{bb} + u_{cc}) + 2(2\,u_b + v_a)\, u_{ab} + 2(2\,u_c + w_a)\, u_{ac} + 2(v_c + w_b)\, u_{bc} + u_b\, v_{aa} + v_a\, v_{bb} + (v_a + u_b)\, v_{cc} \\
&\qquad - w_c\, v_{ab} + v_c\, v_{ac} + u_c\, v_{bc} + u_c\, w_{aa} + (u_c + w_a)\, w_{bb} + w_a\, w_{cc} + w_b\, w_{ab} - v_b\, w_{ac} + u_b\, w_{bc}] \\
&+ 6\,c_{111}\, u_a\, u_{aa} + 2\,c_{112}[(v_b + w_c)\, u_{aa} + (u_a + v_b)\, v_{ab} + (u_a + w_c)\, w_{ac}] \\
&+ \tfrac{1}{2}\,c_{144}[w_c\, u_{bb} + v_b\, u_{cc} + w_c\, v_{ab} + (w_b + v_c)\, v_{ac} + (u_c + w_a)\, v_{bc} + (v_c + w_b)\, w_{ab} + v_b\, w_{ac} + (u_b + v_a)\, w_{bc}] \\
&+ \tfrac{1}{2}\,c_{166}[(u_a + v_b)\, u_{bb} + (u_a + w_c)\, u_{cc} + 2(u_b + v_a)\, u_{ab} + 2(u_c + w_a)\, u_{ac} + (u_b + v_a)(v_{aa} + v_{bb}) + (u_a + v_b)\, v_{ab} \\
&\qquad + (u_c + w_a)(w_{aa} + w_{cc}) + (u_a + w_c)\, w_{ac}] \\
&+ c_{123}[w_c\, v_{ab} + v_b\, w_{ac}] + \tfrac{1}{4}\,c_{456}[2(v_c + w_b)\, u_{bc} + (v_a + u_b)\, v_{cc} + (v_c + w_b)\, v_{ac} + (u_c + w_a)(v_{bc} + w_{bb}) + (v_c + w_b)\, w_{ab} \\
&\qquad + (u_b + v_a)\, w_{bc}] = \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{32}$$

48 H. SUSSE, J. Phys. Radium **16**, 348 [1955].

die beiden anderen ergeben sich durch zyklische Vertauschung der Variablen.

Im speziellen wird bei Druck in $\langle 001\rangle$-Richtung und einer elastischen Welle in $\langle 110\rangle$-Richtung ein Punkt mit den Anfangskoordinaten $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ nach $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ verschoben

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (1+\alpha)\,\bar{a} + A_1 \exp\{i[\omega t - (1+\alpha)\,k\,\bar{a}]\}, \\ \bar{y} &= (1+\alpha)\,\bar{b} + A_2 \exp\{i[\omega t - (1+\alpha)\,k\,\bar{a}]\}, \\ \bar{z} &= (1+\gamma)\,\bar{c} + A_3 \exp\{i[\omega t - (1+\alpha)\,k\,\bar{a}]\}. \end{aligned} \tag{33}$$

Nach der Drehung dieses Koordinatensystems ins System der Elementarzelle folgen die Verschiebungen

$$\begin{aligned} u &= \alpha\,a + \frac{\sqrt{2}}{2}(A_2+A_1)\exp\left\{i\left[\omega t - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\alpha)\,k(a-b)\right]\right\}, \\ v &= \alpha\,b + \frac{\sqrt{2}}{2}(A_2-A_1)\exp\left\{i\left[\omega t - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\alpha)\,k(a-b)\right]\right\}, \\ w &= \gamma\,c + A_3 \exp\left\{i\left[\omega t - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\alpha)\,k(a-b)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{34}$$

Dabei spalten sich die Größen α und γ je in eine Größe erster und in eine Größe zweiter Ordnung

$$\alpha = \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}, \qquad \gamma = \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} \tag{35}$$

auf, die je für sich im statischen Fall aus dem Spannungstensor und den Randbedingungen berechnet werden können. In der elastischen Differentialgleichung treten nun nur Glieder A_j, $\alpha^{(1)}\cdot A_j$ und $\gamma^{(1)}\cdot A_j$ auf, alle anderen sind dagegen klein. Mit der Bedingung, daß die Koeffizienten der Amplituden A_j alle Null sein müssen, folgt

für die *Longitudinalwelle:*

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}(1+4\,\alpha-\gamma)\,c_{11} + \tfrac{1}{2}(1+4\,\alpha+\gamma)\,c_{12} + (1+2\,\alpha-\gamma)\,c_{44} \\ &\quad + 3\,\alpha\,c_{111} + (3\,\alpha+\gamma)\,c_{112} + \tfrac{1}{2}\gamma\,c_{144} + \alpha\,c_{166} \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\gamma\,c_{123} = \varrho\,v^2 \end{aligned} \tag{36 a}$$

(Druckrichtung $\langle 001\rangle$, Wellenrichtung $\langle 110\rangle$, Teilchenrichtung $\langle 110\rangle$),

für die *Transversalwellen:*

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}(1+4\,\alpha-\gamma)\,c_{11} - \tfrac{1}{2}(1-3\,\gamma)\,c_{12} + 3\,\alpha\,c_{111} \\ &\quad + (\gamma-\alpha)\,c_{112} - \tfrac{1}{2}\gamma\,c_{123} = \varrho\,v^2 \end{aligned} \tag{36 b}$$

(Druckrichtung $\langle 001\rangle$, Wellenrichtung $\langle 110\rangle$, Teilchenrichtung $\langle 1\bar{1}0\rangle$),

$$\begin{aligned} &\alpha\,c_{11} + (\alpha+\gamma)\,c_{12} + (1+\gamma)\,c_{44} \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\alpha\,c_{144} + \tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)\,c_{166} = \varrho\,v^2 \end{aligned} \tag{36 c}$$

(Druckrichtung $\langle 001\rangle$, Wellenrichtung $\langle 110\rangle$, Teilchenrichtung $\langle 001\rangle$)

mit $\alpha = \alpha^{(1)} = \nu\,\dfrac{P_1}{E}$; $\gamma = \gamma^{(1)} = -\dfrac{P_1}{E}$; $\nu = \dfrac{c_{12}}{c_{11}+c_{12}}$.

$$E = c_{11} - 2\,c_{12}\,\nu \quad \text{und} \quad \varrho = \varrho_0[1-(2\,\alpha+\gamma)]. \tag{36 d}$$

Bei Druck in $\langle 110\rangle$-Richtung und einer elastischen Welle in $\langle 001\rangle$-Richtung sind die Verschiebungen im Koordinatensystem der Elementarzelle

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\,a + \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\,b + \frac{\sqrt{2}}{2}(A_2+A_1)\exp\{i[\omega t-(1+\gamma)\,k\,c]\}, \\ v &= \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\,a + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\,b + \frac{\sqrt{2}}{2}(A_2-A_1)\exp\{i[\omega t-(1+\gamma)\,k\,c]\}, \\ w &= \gamma\,c + A_3 \exp\{i[\omega t-(1+\gamma)\,k\,c]\}, \end{aligned} \tag{37}$$

und damit folgt für die Longitudinalwelle

$$\begin{aligned} &(1+4\,\gamma-\alpha-\beta)\,c_{11} + (\alpha+\beta)\,c_{12} + 6\,\gamma\,c_{111} \\ &\quad + 2(\alpha+\beta)\,c_{112} = \varrho\,v^2 \end{aligned} \tag{38 a}$$

(Druckrichtung $\langle 110\rangle$, Wellenrichtung $\langle 001\rangle$, Teilchenrichtung $\langle 001\rangle$), und für die Transversalwellen

$$\begin{aligned} &\gamma\,c_{11} + (\alpha+\beta)\,c_{12} + (1+\gamma+\beta-\alpha)\,c_{44} + \tfrac{1}{4}(\alpha+\beta)\,c_{144} \\ &\quad + \tfrac{1}{4}(\alpha+\beta+2\,\gamma)\,c_{166} + \tfrac{1}{4}(\beta-\alpha)\,c_{456} = \varrho\,v^2 \end{aligned} \tag{38 b}$$

(Druckrichtung $\langle 110\rangle$, Wellenrichtung $\langle 001\rangle$, Teilchenrichtung $\langle 1\bar{1}0\rangle$),

$$\begin{aligned} &\gamma\,c_{11} + (\alpha+\beta)\,c_{12} + (1+\gamma+\alpha-\beta)\,c_{44} + \tfrac{1}{4}(\alpha+\beta)\,c_{144} \\ &\quad + \tfrac{1}{4}(\alpha+\beta+2\,\gamma)\,c_{166} + \tfrac{1}{4}(\alpha-\beta)\,c_{456} = \varrho\,v^2 \end{aligned} \tag{38 c}$$

(Druckrichtung $\langle 110\rangle$, Wellenrichtung $\langle 001\rangle$, Teilchenrichtung $\langle 110\rangle$)

mit

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha^{(1)} = -\frac{P_1}{E}, \\ \beta &= \beta^{(1)} = \frac{c_{11}[(c_{11}+c_{12})-2\,c_{44}]-2\,c_{12}^2}{c_{11}[(c_{11}+c_{12})+2\,c_{44}]-2\,c_{12}^2}\,\frac{P_1}{E}, \\ \gamma &= \gamma^{(1)} = \nu\,\frac{P_1}{E}, \qquad \nu = \frac{4\,c_{12}\,c_{44}}{c_{11}[(c_{11}+c_{12})+2\,c_{44}]-2\,c_{12}^2}, \\ E &= \frac{4\,c_{44}[c_{11}(c_{11}+c_{12})-2\,c_{12}^2]}{c_{11}[(c_{11}+c_{12})+2\,c_{44}]-2\,c_{12}^2}, \\ \varrho &= \varrho_0[1-(\alpha+\beta+\gamma)]. \end{aligned} \tag{38 d}$$

Mit denselben Werten für α, β, γ und ϱ folgt bei Druck in $\langle 110\rangle$-Richtung und einer elastischen Welle in $\langle 1\bar{1}0\rangle$-Richtung die Verschiebung im Koordinatensystem der Elementarzelle:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\,a + \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\,b + \frac{\sqrt{2}}{2}(A_2+A_1)\exp\left\{i\left[\omega t - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\beta)\,k(a+b)\right]\right\}, \\ v &= \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\,a + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\,b + \frac{\sqrt{2}}{2}(A_2-A_1)\exp\left\{i\left[\omega t - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\beta)\,k(a+b)\right]\right\}, \\ w &= \gamma\,c + A_3 \exp\left\{i\left[\omega t - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\beta)\,k(a+b)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{39}$$

Daraus wird für die Longitudinalwelle

$$\tfrac{1}{2}(1+4\beta-\gamma)\,c_{11}+\tfrac{1}{2}(1+4\beta+\gamma)\,c_{12}+(1+4\beta-2\alpha-\gamma)\,c_{44}+\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)\,c_{111}+\tfrac{1}{2}(3\alpha+3\beta+2\gamma)\,c_{112} + \tfrac{1}{2}(3\beta-\alpha)\,c_{166}+\tfrac{1}{2}\gamma\,c_{144}+\tfrac{1}{2}\gamma\,c_{123}=\varrho\,v^2 \tag{40 a}$$

(Druckrichtung $\langle 110\rangle$, Wellenrichtung $\langle 1\bar{1}0\rangle$, Teilchenrichtung $\langle 1\bar{1}0\rangle$), und für die Transversalwellen

$$\tfrac{1}{2}(1+2\alpha+2\beta-\gamma)\,c_{11}-\tfrac{1}{2}(1-3\gamma)\,c_{12}+(\beta-\alpha)\,c_{44}+\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)\,c_{111}+\tfrac{1}{2}(2\gamma-\alpha-\beta)\,c_{112}-\tfrac{1}{2}\gamma\,c_{123}=\varrho\,v^2 \tag{40 b}$$

(Druckrichtung $\langle 110\rangle$, Wellenrichtung $\langle 1\bar{1}0\rangle$, Teilchenrichtung $\langle 110\rangle$),

$$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,c_{11}+\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+2\gamma)\,c_{12}+(1+2\beta+\gamma-2\alpha)\,c_{44}+\tfrac{1}{4}(\alpha+\beta)\,c_{144}+\tfrac{1}{4}(2\gamma+\alpha+\beta)\,c_{166}+\tfrac{1}{4}(\beta-\alpha)\,c_{456}=\varrho\,v^2 \tag{40 c}$$

(Druckrichtung $\langle 110\rangle$, Wellenrichtung $\langle 1\bar{1}0\rangle$, Teilchenrichtung $\langle 001\rangle$).

Mason, McSkimmin und Bateman [20] erhalten für die $\varrho\,v^2$ bei einem Druck $P_1=6{,}895\cdot 10^8$ dyn/cm² folgende Werte

$1{,}555\,742\ \cdot 10^{12}$ dyn cm$^{-2}=\varrho\,v^2$, Gl. (36 a),
$0{,}404\,4666\cdot 10^{12}$ dyn cm$^{-2}=\varrho\,v^2$, Gl. (36 b),
$0{,}672\,0969\cdot 10^{12}$ dyn cm$^{-2}=\varrho\,v^2$, Gl. (36 c),
$1{,}290\,195\ \cdot 10^{12}$ dyn cm$^{-2}=\varrho\,v^2$, Gl. (38 a),
$0{,}671\,3571\cdot 10^{12}$ dyn cm$^{-2}=\varrho\,v^2$, Gl. (38 b),
$0{,}671\,0890\cdot 10^{12}$ dyn cm$^{-2}=\varrho\,v^2$, Gl. (38 c),
$1{,}557\,265\ \cdot 10^{12}$ dyn cm$^{-2}=\varrho\,v^2$, Gl. (40 a),
$0{,}402\,5866\cdot 10^{12}$ dyn cm$^{-2}=\varrho\,v^2$, Gl. (40 b),
$0{,}671\,3653\cdot 10^{12}$ dyn cm$^{-2}=\varrho\,v^2$, Gl. (40 c).

Gleichzeitig gelten für hydrostatischen Druck die Gln. (9), die folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} c'_{11}&=c_{11}-\frac{p}{c_{11}+2\,c_{12}}(2\,c_{11}+2\,c_{12}+6\,c_{111}+4\,c_{112})\,,\\ c'_{12}&=c_{12}-\frac{p}{c_{11}+2\,c_{12}}(c_{123}+4\,c_{112}-c_{11}-c_{12})\,,\\ c'_{44}&=c_{44}-\frac{p}{c_{11}+2\,c_{12}}\left(c_{44}+c_{11}+2\,c_{12}+\frac{1}{2}c_{144}+c_{166}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

McSkimmin [49] mißt bei einem Druck von $20{,}685\cdot 10^8$ dyn cm^{-2}:

$c'_{11}=1{,}298\,84\ \cdot 10^{12}$ dyn cm^{-2},
$c_{11}\ =1{,}288\,33\ \cdot 10^{12}$ dyn cm^{-2},
$c'_{12}=0{,}491\,806\cdot 10^{12}$ dyn cm^{-2},
$c_{12}\ =0{,}482\,871\cdot 10^{12}$ dyn cm^{-2},
$c'_{44}=0{,}673\,713\cdot 10^{12}$ dyn cm^{-2},
$c_{44}\ =0{,}670\,906\cdot 10^{12}$ dyn cm^{-2}.

Eine Ausgleichsrechnung [38] ergibt aus diesen 12 Gleichungen folgende Mittelwerte:

$c_{111}=(-1{,}22\pm 0{,}08)\cdot 10^{12}$ dyn cm^{-2},
$c_{456}=(-1{,}65\pm 0{,}19)\cdot 10^{12}$ dyn cm^{-2},
$c_{144}=(-0{,}17\pm 0{,}19)\cdot 10^{12}$ dyn cm^{-2},
$c_{166}=(-6{,}07\pm 0{,}28)\cdot 10^{12}$ dyn cm^{-2},
$c_{112}=(-1{,}45\pm 0{,}15)\cdot 10^{12}$ dyn cm^{-2},
$c_{123}=(+2{,}16\pm 0{,}42)\cdot 10^{12}$ dyn cm^{-2}.

Für Germanium wurde die Druckabhängigkeit des Kompressionsmoduls gemessen [41]. Sie beträgt:

$$\frac{1}{K_0}\,\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}p}=5{,}16\cdot 10^{-12}\ \mathrm{cm^2/dyn}\,.$$

Aus der Beziehung (9 a) folgt

$$\frac{1}{K_0}\,\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}p}=4{,}01\cdot 10^{-12}\ \mathrm{cm^2/dyn}$$

mit den oben erhaltenen Werten der c_{ikl}.

[49] H. J. McSkimmin, J. Acoust. Soc. Amer. **29**, 1185 [1957].